

1. Vypočítejte limitu ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} .$$

nebo

1. Necht' je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Co můžete říci o limitě posloupnosti $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Příslušná tvrzení dokažte.

nebo

1. Napište definici nevlastní limity posloupnosti ($+\infty$) .

Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ a necht' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ je $a_n > b_n$.

Co můžete říci o limitě $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? Odůvodněte.

(10 bodů)

2. Funkce f je definována:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \text{ pro } |x| \geq 1 .$$

Ukažte, že funkce f i její derivace f' jsou funkce spojité v $\mathbb{R}$.

nebo

2. Ukažte, že f je spojitá v $\mathbb{R}$ a dále zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$ (a tyto derivace spočítejte), když:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ pro } x \neq 0, \quad f(0) = \frac{1}{2} .$$

(15 bodů)

3. Najděte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2} .$$

nebo:

Vyšetřete průběh zadané funkce:

najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f a limity v krajních bodech;
vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii, lokální a globální extrémy funkce f ;
vypočítejte druhou derivaci, najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní; načrtněte graf funkce.

(20 bodů)

4. Určete největší otevřený interval, kde existuje integrál

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)} dx \quad \text{nebo} \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad \text{nebo} \quad \int \frac{x+5}{(x+3) \cdot (x^2 + 4x + 5)} dx$$

a integrál vypočítejte.

nebo

4. Vypočítejte obsah omezené rovinné oblasti, která je ohraničená grafem funkce $y = \arcsin x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[0,0]$ a přímkou $x = 1$.

nebo

4. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy x omezené rovinné oblasti ω , která je ohraničená grafy funkcí $y = xe^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

(15 bodů)